

Epreuve de mathématiques

Serie D

03H00

Exercice 1 : 8 points

- A. On considère dans \mathbb{C} le polynôme P défini par $P(z) = z^3 - z^2 + z + 1 + a$
- Déterminer $a \in \mathbb{R}$ de telle sorte que $z = -i$ soit racine de P (1 pt)
 - Pour cette valeur de a , factoriser $P(z)$ dans \mathbb{C} puis dans \mathbb{R} (3 pts)
- B. Prouver qu'il n'existe aucun complexe z vérifiant $|z| - z = i$ (2 pts)
- C. Déterminer de façon précise l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant :

$$\Re((1+i)z) + z\bar{z} = 0 \quad (2\text{pts})$$

Exercice 2 : 13 points

On soumet une population d'enfants à un test pour dépister la présence d'un caractère génétique G . La probabilité qu'un enfant ayant le caractère G ait un test positif est 0,99.
La probabilité qu'un enfant n'ayant pas le caractère G ait un test négatif est 0,98.
On note G l'évènement « l'enfant porte le caractère G », \bar{G} l'évènement contraire et T l'évènement « le test est positif »

- A. On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant sur 1000 était porteur du caractère G
- Déterminer à l'aide des données les probabilités : $P(G)$, $P_G(T)$, $P_{\bar{G}}(T)$ (3 pts)
 - Déterminer la probabilité qu'un enfant pris au hasard dans la population étudiée ait un test positif. (2 pts)
 - Déterminer la probabilité qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère G . (2 pts)
- B. On utilise le test avec une population pour laquelle des études statistiques ont montré qu'un enfant avait une probabilité p d'être porteur du caractère G
- Donner, en fonction de p la probabilité $V(p)$ qu'un enfant ayant un test positif soit porteur du caractère G . (3 pts)
 - Résoudre l'inéquation $V(p) \geq 0,5$. Interpréter le résultat. (3 pts)

Exercice 3 : 10 points

- Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système

$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ x - y + z = 6 \\ x - 4y + 19z = 153 \end{cases} \quad (3\text{pts})$$

2. On considère la série statistique double (X, Y) suivante :

x_i	a	4	b	8	c	12
y_i	-3	a	4	-b	7	c

a) Exprimer en fonction de a, b, c les quantités : \overline{X} , \overline{Y} , $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i y_i$ (**3 pts**)

b) Déterminer les réels a, b, c sachant que l'on a :

$$\overline{X} = \frac{40}{6}, \quad \overline{Y} = \frac{14}{6}, \quad \text{cov}(X, Y) = \frac{179}{18} \quad (\mathbf{4pts})$$

Problème : 19 points

Les trois parties sont indépendantes

A. On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' - 2y = xe^x$$

- Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction u définie par $u(x) = (ax + b)e^x$ soit solution de (E) (**2 pts**)
- Déterminer la solution générale de l'équation $y' - 2y = 0$ (**1 pt**)
- Déterminer l'ensemble des solutions de (E) (**1 pt**)
- En déduire la solution de l'équation (E) qui s'annule en 0. (**1 pt**)

B. Soit f une fonction numérique de la variable réelle x définie et dérivable sur \mathbb{R} satisfaisant aux conditions suivantes :

$$- f(1) = f(3) = 0; \quad f(2) = -1; \quad f(0) = 1; \quad f'(0) = f'(2) = 0$$

—

$$\forall x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[, \quad f'(x) > 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, 2[, \quad f'(x) < 0$$

—

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)] = 0$$

- Dresser le tableau de variations complet de f (**2 pts**)
- En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x (**2 pts**)
- Préciser les asymptotes à la courbe représentative de f (**1 pt**)
- Tracer une courbe susceptible de représenter f (**1 pt**)

C. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= u_n + 2n + 3 \end{cases}$$

- Étudier la monotonie de (u_n) (**1 pt**)
- Démontrer par récurrence que pour tout entier n , $u_n \geq n^2$ (**2 pts**)
- En déduire la limite de (u_n) (**1 pt**)
- Calculer les cinq premiers termes de (u_n) . (**1 pt**)
- Conjecturer alors une expression de (u_n) en fonction de n puis démontrer la propriété conjecturée. (**3 pts**)